Jan Kellermann (V3794082) mail@otternase.org **"Gruppe 4"** **Tutorin: Susanne Richter richters@inf.fu-berlin.de**

Lösung Übungsblatt Nr. 9 / ALP 1 zur Abgabe 28.01.2004

Aufgabe 1

Behauptung: $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Induktionsanfang: n=1 trivial

Induktionsvoraussetzung: Behauptung gilt für ein n.

Induktionsschritt: n -> n+1

Zu zeigen: $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$

$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2$ *, nach I.V. Gleich*

$\frac{n(n+1)(2n+1)+6((n+1)^2)}{6}=$ ¿

$\frac{(n+1)(2n+1)+6(n+1)}{6}=$ ¿

$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}=$ ¿

$\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$

q.e.d.

Lösung Übungsblatt Nr. 9 / ALP 1 zur Abgabe 28.01.2004

Aufgabe 2

Behauptung: $1^2+3^2+5^2...+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$

Induktionsanfang: n=1 trivial

Induktionsvoraussetzung: Behauptung gilt für ein n.

Induktionsschritt: n -> n+1

Zu zeigen: $1^2+3^2+5^2...+(2n-1)^2+(2n+1)^2=\frac{(n+1)(4(n+1)^2-1)}{3}$

$1^2+3^2+5^2...+(2n-1)^2+(2n+1)^2$ *, nach I.V. Gleich*

$\frac{n(4n^2-1)}{3}+(2n+1)^2=¿$

$\frac{(4n^3+12n^2+11n+3)}{3}=¿$

$\frac{(n+1)(4n^2+8n+3)}{3}=¿$

$\frac{(n+1)((4n^2+8n+4)-1)}{3}=¿$

$\frac{(n+1)((4(n^2+2n+1))-1)}{3}=¿$

$\frac{(n+1)(4(n+1)^2-1)}{3}$

q.e.d.

Lösung Übungsblatt Nr. 9 / ALP 1 zur Abgabe 28.01.2004

Aufgabe 3

Behauptung: $F(n) = \frac{(r^n - s^n)}{\sqrt{(5)}}$ mit $r = \frac{1+\sqrt{(5)}}{2}$, $s = \frac{1-\sqrt{(5)}}{2}$

Induktionsvoraussetzung: $F(n) = \frac{(r^n - s^n)}{\sqrt{(5)}}$ *und* $F(n+1) = \frac{(r^{(n+1)} - s^{(n+1)})}{\sqrt{(5)}}$ *gilt für ein n.*

Induktionsschritt: n,n+1 -> n+2

Zu zeigen: $F(n+2) = F(n) + F(n+1) = \frac{r^{(n+2)} - s^{(n+2)}}{\sqrt{(5)}}$

$F(n) + F(n+1)$ *ist nach I.V. Gleich*

$$\frac{r^n - s^n}{\sqrt{(5)}} + \frac{r^{(n+1)} - s^{(n+1)}}{\sqrt{(5)}} = ¿$$

$$\frac{r^n - s^n + r^{(n+1)} - s^{(n+1)}}{\sqrt{(5)}} = ¿$$

$$\frac{r^n + r^{(n+1)} - s^n - s^{(n+1)}}{\sqrt{(5)}} = ¿$$

$$\frac{r^n(1+r) - s^n(1+s)}{\sqrt{(5)}} = ¿$$ (siehe Zwischenschritt)

$$\frac{r^n(r^2) - s^n(s^2)}{\sqrt{(5)}} = ¿$$

$$\frac{r^{(n+2)} - s^{(n+2)}}{\sqrt{(5)}} = ¿$$

q.e.d.

Zwischenschritt:

$$r^2 = \frac{(1+\sqrt{(5)})^2}{4}$$

$$r^2 = \frac{3+\sqrt{(5)}}{2}$$

$$r^2 = \frac{1+\sqrt{(5)}}{2} + 1$$

$$r^2 = r + 1$$

Lösung Übungsblatt Nr. 9 / ALP 1 zur Abgabe 28.01.2004

Aufgabe 4

Funktion:
```
sumList [] = 0
sumList (b:y) = b + sumList y
```

Behauptung a):
```
sumList (x ++ y) = sumList x + sumList y
```

Induktionsanfang:
`sumList ([x] ++ y)` *ist nach Def.* `sumList (x:y)`, *also* `x + (sumList y)`.

Es gilt `sumList [x] + sumList y = x + sumList [] + sumList y = x + 0 + sumList y`.

`x + sumList y` *ist nach Def.* `sumList (x:y)`, *also* `sumList (x ++ y)`.

q.e.d.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gilt für eine beliebige endliche Liste.

Induktionsschritt: `[x] -> (x:xs)`

Zu zeigen: `sumList ((x:xs) ++ y) = sumList (x:xs) + sumList y`

`sumList ((x:xs) ++ y)` *ist nach Def.* `sumList (x:xs:y)`. *Also* `x + sumList (xs ++ y)`, *was nach I.V.* `x + sumList xs + sumList y` *ist. Nach Def.* `sumList (x:xs) + sumList y`.

q.e.d.

Behauptung b): `sumList (x ++ y) = sumList (y ++ x)`

Induktionsanfang: `sumList ([x] ++ y)`
ist nach a) `sumList [x] + sumList y = x + sumList y`, *bzw.*
```
sumList y + x =
sumList y + x + sumList [] =
sumList y + sumList [x] =
sumList (y ++ [x])
```

q.e.d.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gilt für eine beliebige endliche Liste.

Induktionsschritt: `[x] -> (x:xs)`

Zu zeigen: `sumList ((x:xs) ++ y) = sumList (y ++ (x:xs))`

`sumList ((x:xs) ++ y)` *ist nach Def.* `sumList (x:xs:y)`.
Also `x + sumList (xs ++ y)`, *was nach a)*
```
x + sumList xs + sumList y =
sumList (x:xs) + sumList y =
sumList ((x:xs) ++ y)
```
und nach I.V. `sumList (y ++ (x:xs))` *ist.*

q.e.d.

Lösung Übungsblatt Nr. 9 / ALP 1 zur Abgabe 28.01.2004

Aufgabe 5

```
double [] = []
double (b:y) = (2*b):(double y)
```

Behauptung: `double (x ++ y) = double x ++ double y`

Induktionsanfang: `double ([x] ++ y)`, *bzw.*
`double (x:y) =`
`(2*x):(double y) =`
`(2*x) ++ double [] ++ double y =`
`double x ++ double y`.

q.e.d.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gilt für eine beliebige endliche Liste.

Induktionsschritt: `[x] -> (x:xs)`

Zu zeigen: `double ((x:xs) ++ y) = double (x:xs) ++ double y`
`double ((x:xs) ++ y) = double ((x:xs):y)` *ist nach Def.* `(2*(x:xs)):(double y)`.
`(2*(x:xs)) ++ double [] ++ double y = double (x:xs) ++ double y` *nach der I.V.*

q.e.d.

Aufgabe 6

```
length [] = 0
length (x:xs) = 1+(length xs)
```

Behauptung a): `length (x ++ y) = length x + length y`

Induktionsanfang: `length ([x] ++ y)`, bzw. `length (x:y)` *ist nach Def.* `1 + lenght y`.
`1 + lenght y = 1 + 0 + lenght y = 1 + length [] + lenght y = length x + lenght y`.

q.e.d.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gilt für eine beliebige endliche Liste.

Induktionsschritt: `[x] -> (x:xs)`

Zu zeigen: `length ((x:xs) ++ y) = length (x:xs) + length y`
`length ((x:xs) ++ y)` *ist nach I.V.* `length (x ++ xs) + length y =`
`length x + length xs + length y = length (x:xs) + length y`.

q.e.d.

Behauptung b): `length (double x) = length x`

Induktionsanfang: `length (double [x])` *ist nach Def.* `length ((2*x):(double []))  =`
`1+(length []) = 1 = length (x:[])` *und nach a)* `length x + length [] = length x`.

q.e.d.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gilt für eine beliebige endliche Liste.

Induktionsschritt: `[x] -> (x:xs)`

Zu zeigen: `length (double (x:xs)) = length (x:xs)`
`length (double (x:xs))` *ist nach 5)* `length (double x ++ double xs)` *und nach a)*
`length (double x) + length (double xs)` *und nach der I.V.* `length x + length xs`.
Nach a) `length (x:xs)`.

q.e.d.